Résolution d'équations

Comment résoudre une équation sans inconnue au dénominateur :

Théorème 1 :

Un produit de facteurs est nul si et seulement si l'un des facteurs est nul : $A.B = 0 \Leftrightarrow A = 0$ ou $B = 0$

exemple 1 :

Résoudre l'équation $(E) : (x+1)^2 = 3(x+1)(x-3)$

Pour résoudre une équation du type $A(x) = B(x)$, on transpose d'abord tous les termes du même côté de l'égalité pour obtenir une équation de la forme $C(x) = 0$

$$\begin{aligned}(E) &\Leftrightarrow (x+1)^2 - 3(x+1)(x-3) = 0 \\ &\Leftrightarrow (x+1)\left[(x+1) - 3(x-3)\right] = 0 \\ &\Leftrightarrow (x+1)(-2x+10) = 0\end{aligned}$$

on factorise ensuite $C(x)$

$$\begin{aligned}&\Leftrightarrow x+1 = 0 \quad \text{ou} \quad -2x+10 = 0 \\ &\Leftrightarrow x = -1 \quad \text{ou} \quad x = 5\end{aligned}$$

on applique le théorème 1

Les solutions de l'équation sont - 1 et 5 .

Comment résoudre une équation avec inconnue au dénominateur :

Théorème 2 :

Un quotient est nul , si et seulement si :
le numérateur est nul , mais pas le dénominateur :

$$\frac{N}{D} = 0 \Leftrightarrow \mathrm{N} = 0 \text{ et } \mathrm{D} \neq 0$$

Théorème 3 :

Si deux quotients ont le même dénominateur alors on comparera les numérateurs :

$$\frac{A}{B} = \frac{C}{B} \Leftrightarrow \mathrm{A} = \mathrm{C} \text{ et } \mathrm{B} \neq 0$$

exemple 2 :

Résoudre l'équation (E) : $\dfrac{2}{x+3}+\dfrac{1}{x}=\dfrac{3}{x^2+3x}$

$$D=\mathbb{R}/\{-3;0\}$$
$$=\mathbb{R}^*/\{-3\}$$

On détermine d'abord le domaine de définition de (E)

$$(E)\ \Leftrightarrow\ \frac{2x}{x(x+3)}+\frac{1(x+3)}{x(x+3)}=\frac{3}{x^2+3x}$$

On réduit au même dénominateur

$$\Leftrightarrow\ \frac{2x+x+3-3}{x(x+3)}=0$$

On se ramène, en transposant et en simplifiant, à une équation du type $\dfrac{N(x)}{D(x)}=0$

$$\Leftrightarrow\ \frac{3x}{x(x+3)}=0$$

$$\Leftrightarrow\ 3x=0 \quad \text{et} \quad x\in D$$
$$\Leftrightarrow\ x=0 \quad \text{et} \quad x\in D$$

Th 2 : un quotient est nul si et seulement si son numérateur est nul

à rejeter car $0\notin D$

L'équation (E) n'admet donc pas de solution : $S=\varnothing$

exemple 3 :

Résoudre l'équation (F) : $x+2=\dfrac{1}{x+2}$

$$D=\mathbb{R}/\{-2\}$$

$$(F)\ \Leftrightarrow\ \frac{(x+2)^2}{x+2}=\frac{1}{x+2}$$
$$\Leftrightarrow\ (x+2)^2=1 \quad \text{et} \quad x\in D$$

On applique le théorème 3

$$\Leftrightarrow\ (x+2)^2-1=0 \quad \text{et} \quad x\in D$$

Identité remarquable : $a^2-b^2=(a-b)(a+b)$

$$\Leftrightarrow\ (x+2-1)(x+2+1)=0 \quad \text{et} \quad x\in D$$

$$\Leftrightarrow\ (x+1)(x+3)=0 \quad \text{et} \quad x\in D$$
$$\Leftrightarrow\ x+1=0 \quad \text{ou} \quad x+3=0 \quad \text{et} \quad x\in D$$
$$\Leftrightarrow\ x=-1 \quad \text{ou} \quad x=-3 \quad \text{et} \quad x\in D$$

L'équation (F) admet donc pour solutions - 1 et - 3 : $S=\{-3;-1\}$